Haladó pénzügyek

Tőkepiaci árazási modellek

Kötelező és ajánlott irodalom

Kötelező irodalom:

- ***Bodie , Z. – Kane, A. – Marcus, A.J***.: *Befektetések, Aula, Budapest, 2005., 185 - 400. o.*

Ajánlott irodalom:

- ***Markowitz, H.*** *(1952): Portfolio selection The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1. 77-91.*
- ***Mossin, J.*** *(1966): Equilibrium in a Capital Asset Market, Econometrica, Volume 34, 768-783.*
- ***Sharpe , W. F.*** *(1964) Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk The Journal of Finance, Vol. 19, No. 3., 425-442.*
- ***Lintner, J.*** *(1965): Security Prices, Risk, and Maximal Gains From Diversification ,The Journal of Finance, Vol. 20, No. 4. Dec., 587-615.*
- ***Roll, R.*** *(1977): A critique of the asset pricing theory's tests: Part I. On past and potential testability of the theory, Journal of Financial Economics, 4, 129-176.*
- ***Ross, S. A.*** *(1976): The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, Journal of Economic Theory, december, 343-362.*
- ***Shanken, J.*** *(1985) The Arbitrage Pricing Theory: Is It Testable? Journal of Finance, 37:1129-1140.*

Az előadás vázlata

1) Döntési szabályok bizonytalan szituációkban
   - Várható hasznosság
   - Átlag – variancia kritérium
2) Portfolió kiválasztás és optimális befektetői döntések (Markowitz-modell)
3) A tőkepiaci árfolyamok modellje (Capital Asset Pricing Model, CAPM)
4) Faktormodellek
5) Az arbitrált árfolyamok elmélete (Arbitrage Pricing Theory, APT)

Az előadás vázlata

1) Döntési szabályok bizonytalan szituációkban
   - Várható hasznosság
   - Átlag – variancia kritérium
2) Portfolió kiválasztás és optimális befektetői döntések (Markowitz-modell)
3) A tőkepiaci árfolyamok modellje (Capital Asset Pricing Model, CAPM)
4) Faktormodellek
5) Az arbitrált árfolyamok elmélete (Arbitrage Pricing Theory, APT)

A várható hasznosság mint döntési kritérium

- A Neumann – Morgenstern várható hasznosság hipotézis axiómái
  - Véletlen változó jele: $a = [x_1, \ldots x_S; \pi_1, \ldots \pi_S]$
  - *Választási lehetőségek halmaza:* $\mathcal{M}$
  - Preferencia viszonyok jelölése:

    gyengén preferált ($\geq$): $\mathcal{R}$

    közömbös (=): $\mathcal{I}$

    preferált (>): $\mathcal{P}$

- **I. axióma (Racionalitás):** a preferencia rendezés racionális, ha
  - *Reflexív:* $\forall a \in \mathcal{M}, a\mathcal{R}a$
  - *Teljes:* $\forall a^1, a^2 \in \mathcal{M}, a^1\mathcal{R}a^2$ *vagy* $a^2\mathcal{R}a^1$
  - *Tranzitív:* $\forall a^1, a^2, a^3 \in \mathcal{M}$, *ha* $a^1\mathcal{R}a^2$ *és* $a^2\mathcal{R}a^3$, *akkor* $a^1\mathcal{R}a^3$

A várható hasznosság mint döntési kritérium

- **II. axióma (Folytonosság):** a preferencia rendezés folytonos, ha $\forall a^1, a^2, a^3 \in \mathcal{M}$, oly módon, hogy $a^1 \mathcal{R} a^2$ és $a^2 \mathcal{R} a^3$, akkor létezik olyan $\alpha \in [0,1]$, hogy
  - $\alpha a^1 + (1-\alpha) a^3 \mathcal{I} a^2$
- **III. axióma (Függetlenség):** $\forall a^1, a^2, a^3 \in \mathcal{M}$ és $\forall \alpha \in [0,1]$ esetén $a^1 \mathcal{R} a^2$ akkor és csak akkor, ha
  - $\alpha a^1 + (1-\alpha) a^3 \mathcal{R}\, \alpha a^2 + (1-\alpha) a^3$
- Ha a preferencia rendezés teljesíti a fenti axiómákat akkor a rendezés kifejezhető *a* függvényeként, amely *a*-hoz a következő értéket rendeli:

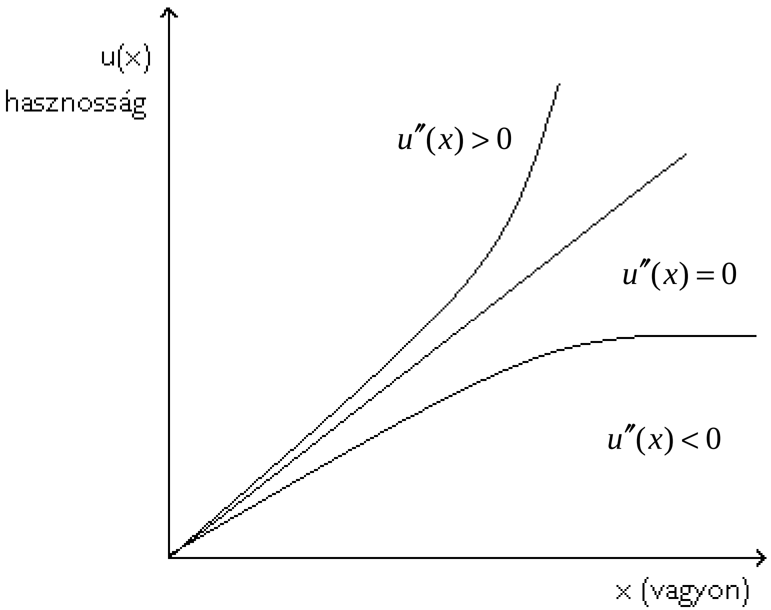
$$U(a) = \sum_{s=1}^{S} p_s u(x_s)$$

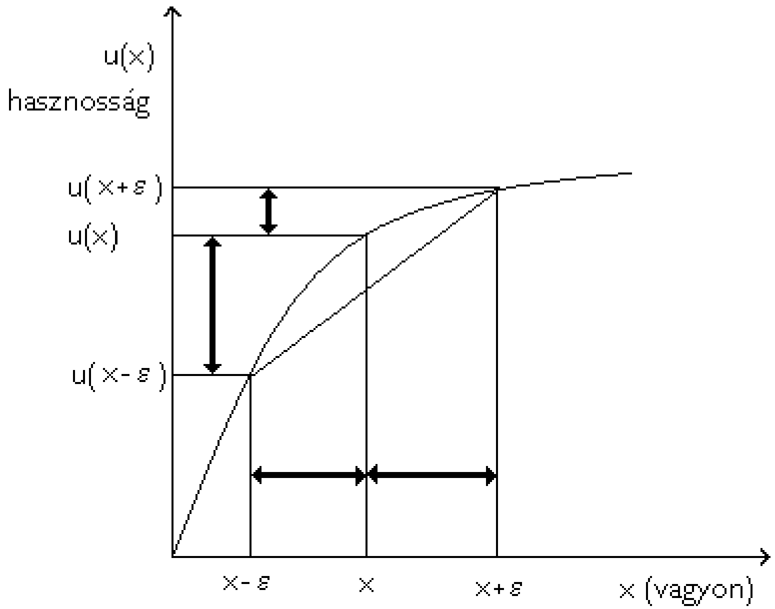
U(a) = várható hasznosság függvény

$$\forall a^1, a^2 \in \mathcal{M},\ a^1 \mathcal{R} a^2 \Leftrightarrow U(a^1) \geq U(a^2)$$

A hasznossági függvény tulajdonságai

- **A befektetők vagyon/jövedelem fölött értelmezett hasznossági függvényei alapján:**
  1) A vagyon/jövedelem határhaszna csökkenő
  2) A vagyon/jövedelem határhaszna állandó
  3) A vagyon/jövedelem határhaszna növekvő



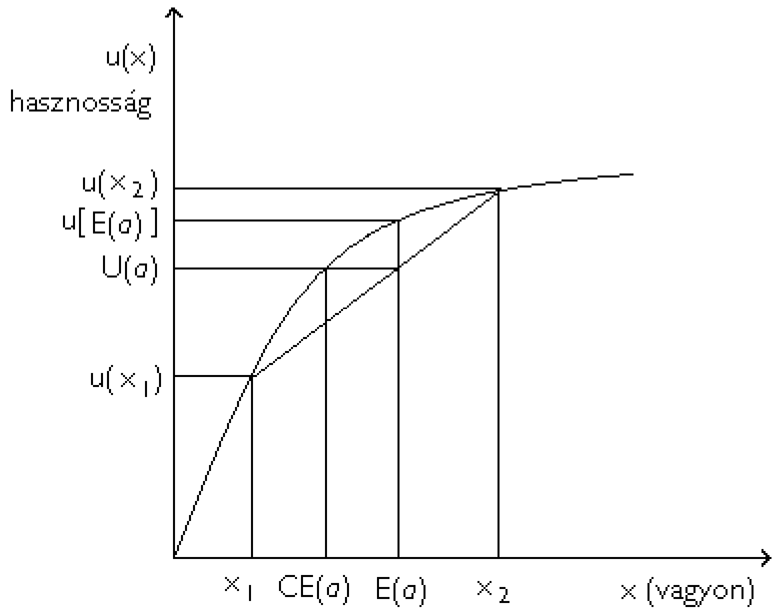


A kockázatkerülés I.

Az *a* projekt várható hasznossága: $U(a) = pu(x_1) + (1-p)u(x_2)$

Bizonyossági egyenértékes (certainty equivalent):
CE(*a*) $\rightarrow$ maximum mennyit érdemes kifizetni az a projektért

$$u[CE(a)] = U(a)$$



Kockázati prémium: a bizonyossági egyenértékes és a várható érték különbsége

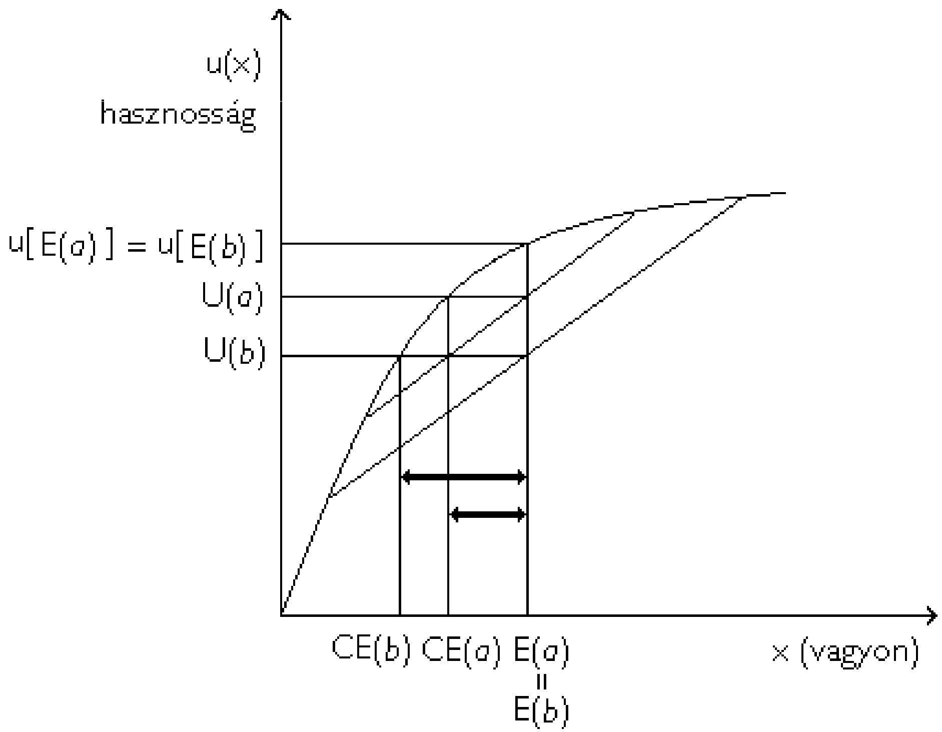
$$\Delta(a) = E(a) - CE(a)$$

Növekvő hasznossági függvény esetén az alábbi állítások ekvivalensek:

1. Az egyén kockázat kerülő
2. Az u(x) függvény konkáv
3. CE(*a*) ≤ E(*a*)
4. Δ(*a*) ≥ 0

A kockázatkerülés 2.

A kockázat kerülő befektető számára az azonos várható megtérülésű, de nagyobb kockázatú projekt várható hasznossága kisebb.



Az átlag – variancia kritérium 1.

- Az A befektetés **dominálja** B-t ha $E(r_A) \geq E(r_B)$ és $\sigma_A \leq \sigma_B$, ahol legalább az egyik egyenlőtlenség szigorú.
- **Másképpen:** az A portfolió dominálja a B portfoliót, ha :

1. magasabb várható hozamot biztosít ugyanakkora (vagy kisebb) kockázat mellett,

vagy

2. kisebb kockázattal rendelkezik ugyanakkora (vagy nagyobb) várható hozam mellett.

- Az X portfolió **hatékony,** ha nem található olyan Y portfolió, amelyre $E(r_Y) \geq E(r_X)$ és $\sigma_Y \leq \sigma_X$ úgy, hogy legalább az egyik egyenlőtlenség szigorú.

- A racionális befektetők a hatékony portfoliók közül választanak

Az átlag – variancia kritérium 2.

- Milyen esetekben feleltethető meg az átlag – variancia kritérium a várható hasznosság döntési kritériumának?

1. ha a hasznosság függvény kvadratikus, azaz ha

$$u(r) = a + br + cr^2$$
$$U(r) = a + bE(r) - cE(r^2)$$
$$U(r) = a + bE(r) - c\left([E(r)]^2 + \sigma^2\right)$$

2. ha nem kvadratikus, akkor közelíthetjük az E(r) helyen vett Taylor polinomjával (a másodrendűnél magasabb fokú tagokat elhanyagoljuk)

$$U(r) \approx u[E(r)] + 0{,}5u''[E(r)]\sigma^2$$

3. ha a hozamok eloszlása többváltozós normális eloszlást követ

$$U(r) = E[u(r)] = E\left(u[E(r) + \sigma\tilde{z}]\right) = V\left(E(r), \sigma\right)$$

Az átlag – variancia kritérium 3.

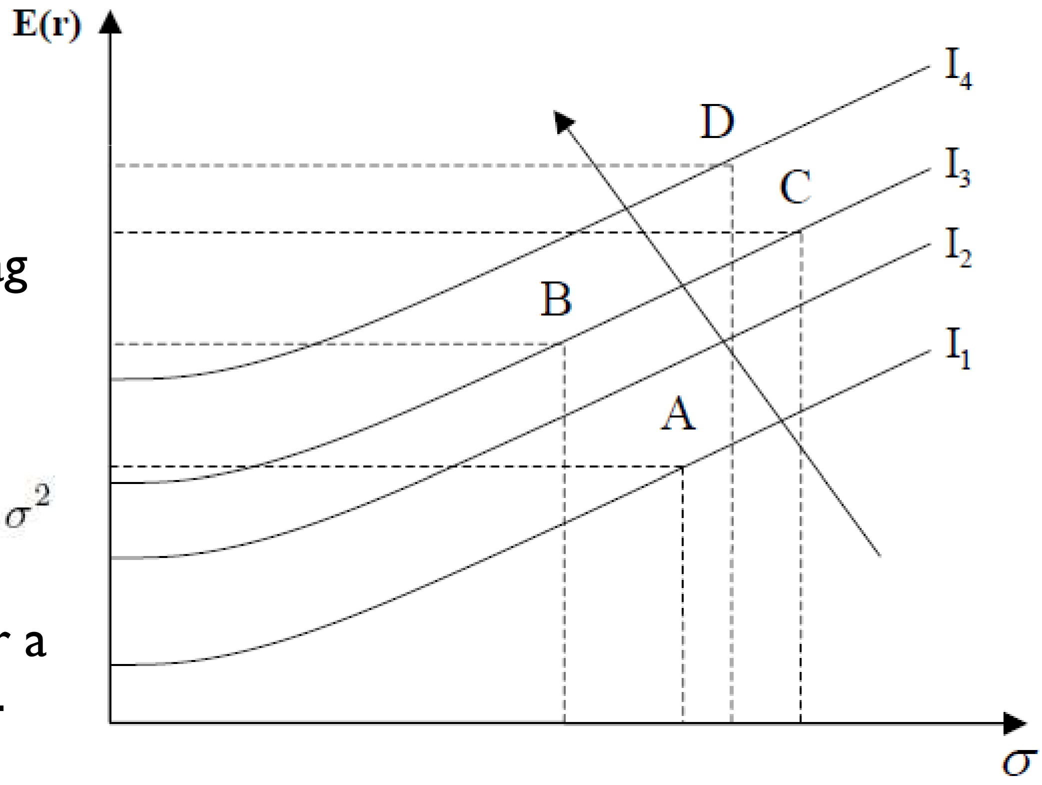
A várható hasznosság leszűkítése: feltételezzük, hogy a befektetők számára **egy értékpapír hasznossága** csak a **hozamának várható értékétől** és **szórásától** függ

$$\mathrm{U}\left(\underset{+}{\mathrm{E}(r)}, \underset{-}{\sigma^2}\right)$$

A várható hasznosság függvény egyszerű közelítése:

$$U = \mathrm{E}(r) - 0.005\, A\, \sigma^2$$

ahol az *A* paraméter a befektető kockázat-elutasítását jellemzi



Feladat (befektetési alap)

- Lehetőségünk nyílik egy **tőke és hozamvédett befektetési alap** befektetési jegyeinek megvásárlására. Az alap zártvégű, **három éves futamidővel.** Az alap által létrehozott portfolióról és a hozamszámítás módjáról a következőket olvashatjuk a tájékoztatóban:
- A befektetés lejáratkori hozamát egy összetett index (továbbiakban Index) teljesítménye határozza meg. Azt, hogy az Ügyfél a futamidő leteltével mekkora hozamra válik jogosulttá, ha befektetését az Alap lejáratáig nem adja el, a futamidő végén határozzuk meg.
- Az Index az alábbi összetevőkből áll:

Index neve	Index súlya
Dow Jonex EuroStoxx	55%
Nikkei 225	15%
Hang Seng	15%
Hang Seng China ENT	15%

Feladat (befektetési alap)

- Az Alap indulásakor az Index értékét 100%-nak tekintve negyedévente megfigyeljük az Index teljesítményét a kiindulási értékhez viszonyítva. Az így kapott **12 értéknek vesszük a számtani átlagát.** A kapott számból kivonjuk az induló értéket, majd **megszorozzuk a részesedéssel, azaz 70%-kal.**
  1. Ha az így kapott hozam kisebb, **mint 12%, akkor Ügyfél megkapja a befektetett összeg 112%-át.**
  2. Ha az így kapott hozam nagyobb, mint 12%, de kisebb **mint 75%, akkor Ügyfél pontosan ezt a hozamot és a névértéket kapja meg.**
  3. Ha az így kapott hozam nagyobb, mint **75%, akkor Ügyfél a befektetett összeg 175%-át kapja vissza.**
- **Tehát a névérték 112%-a a piaci körülményektől függetlenül minden esetben kifizetésre kerül**

Feladat (befektetési alap)

- Érdemes-e az alapba fektetni, ha az elmúlt évek teljesítménye alapján a fentebb definiált Index 12 negyedéves átlaga várhatóan132%-nak adódik, ha az adott időpontban 7%-os hozam mellett három éves futamidejű állampapírba is befektethetünk?
- Érdemes-e az alapba fektetni, ha az Index 12 negyedéves átlagértékére a következő eloszlást feltételezzük:

1. $I_{átlag} \leq 117,1 \rightarrow p_1=0,5$
2. $117,1 < I_{átlag} < 207,1 \rightarrow p_2=0,45$
3. $I_{átlag} \leq 207,1 \rightarrow p_1=0,05$

A három éves állampapír ez esetben is 7%-os hozammal elérhető.

Az előadás vázlata

1) Döntési szabályok bizonytalan szituációkban
   - Várható hasznosság
   - Átlag – variancia kritérium
2) Portfolió kiválasztás és optimális befektetői döntések (Markowitz-modell)
3) A tőkepiaci árfolyamok modellje (Capital Asset Pricing Model, CAPM)
4) Faktormodellek
5) Az arbitrált árfolyamok elmélete (Arbitrage Pricing Theory, APT)

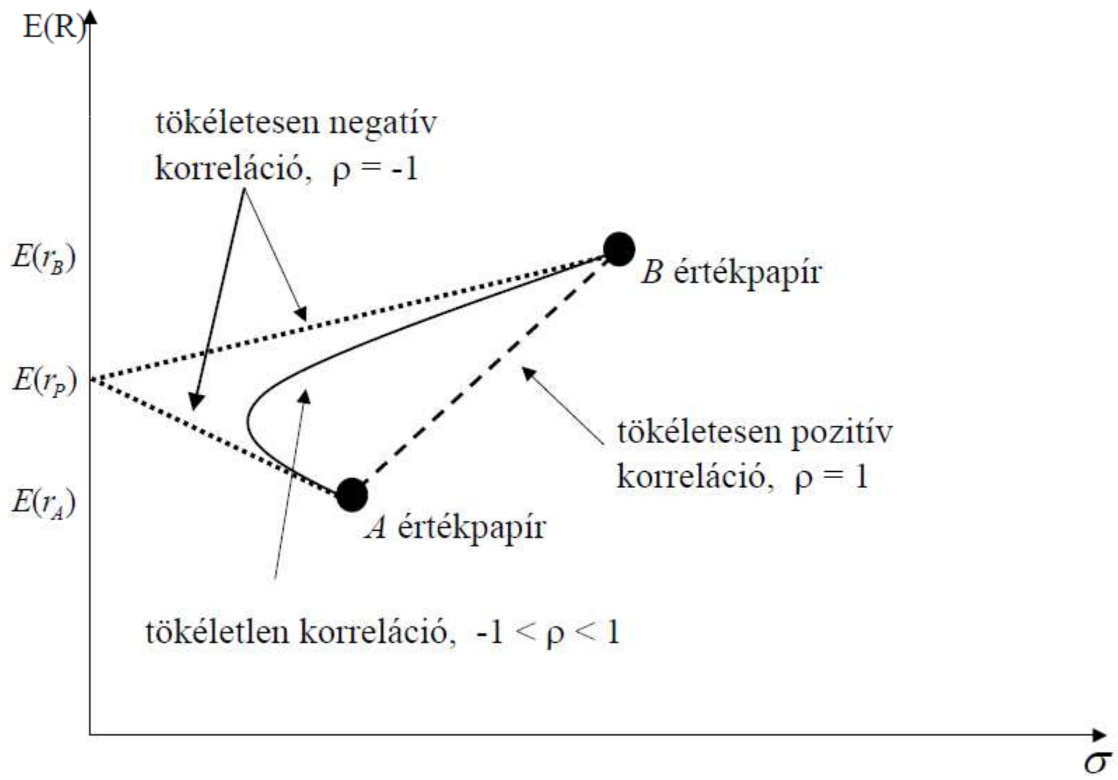
Portfolió kiválasztás két ép. esetén I.

Két értékpapír esetén (nincs kockázatmentes eszköz)

A portfolió várható hozama és varianciája:

$$E(r_P) = w\,E(r_A) + (1-w)\,E(r_B)$$

$$\sigma_P^2 = w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2\sigma_B^2 + 2w(1-w)\,\mathrm{Cov}_{A,B}$$

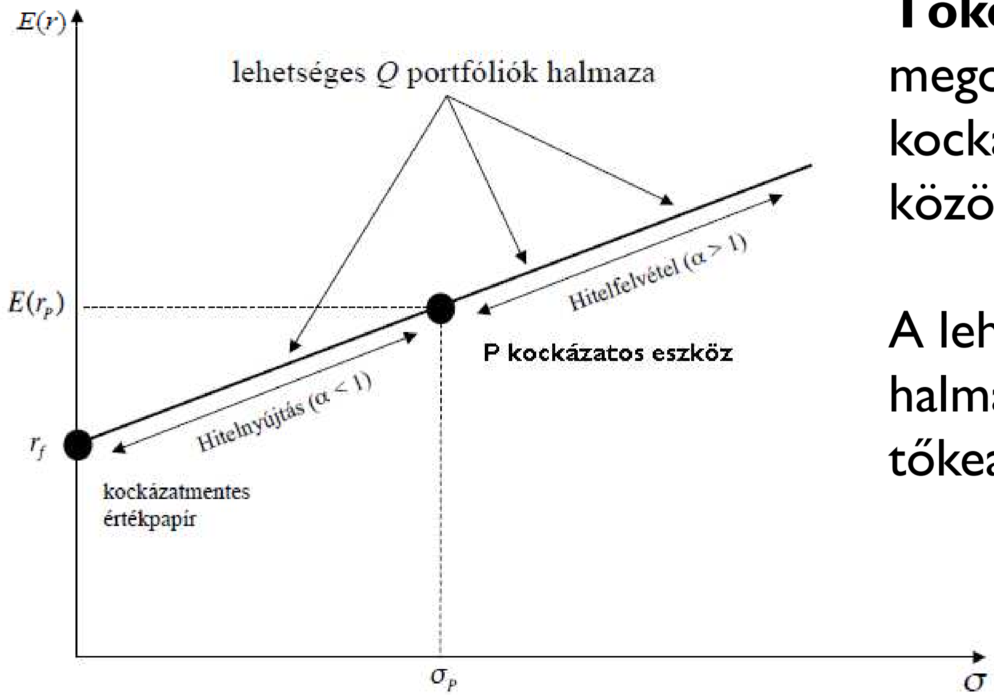


Portfolió kiválasztás két ép. esetén II.

- **Két értékpapír esetén (egy kockázatos és egy kockázatmentes eszköz)**
- A portfolió várható hozama és varianciája:

$$E(r_C) = (1 - y)r_f + yE(r_P)$$

$$\sigma_C^2 = y^2 \sigma_P^2$$



Tőkeallokáció: vagyon megosztása a kockázatos és a kockázatmentes eszközök között

A lehetséges portfoliók halmaza ekkor egy egyenes: tőkeallokációs egyenes (CAL)

Feladatok

Legyen az A értékpapír esetén σ_A=10%, $E(r_A)$=8%

A B értékpapír esetén pedig σ_B=20%, $E(r_B)$=14%

A két eszköz hozama közötti korreláció ρ=0,5

Hasznossági függvényünk $U=E(r) - 0{,}005A\sigma^2$ alakú

1. A= 4 kockázatkerülési együttható mellett milyen arányban tartanánk a két papírt?
2. Mennyi lenne ez az arány A=3, illetve A=2 esetén?
3. Mekkora lenne az optimális portfoliónak a hasznossága A=4 esetén?
4. Határozzuk meg a minimális varianciájú portfoliót!
5. Mekkora ennek a hasznossága A=4 esetén?

Portfolió kiválasztás több ép. esetén I.

n darab értékpapír, **nincs kockázatmentes eszköz**

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \mathrm{Cov}_{i,j} = \mathbf{w}'\mathbf{C}\mathbf{w}$$

$$\mathrm{E}(r_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{E}(r_i) = \mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1$$

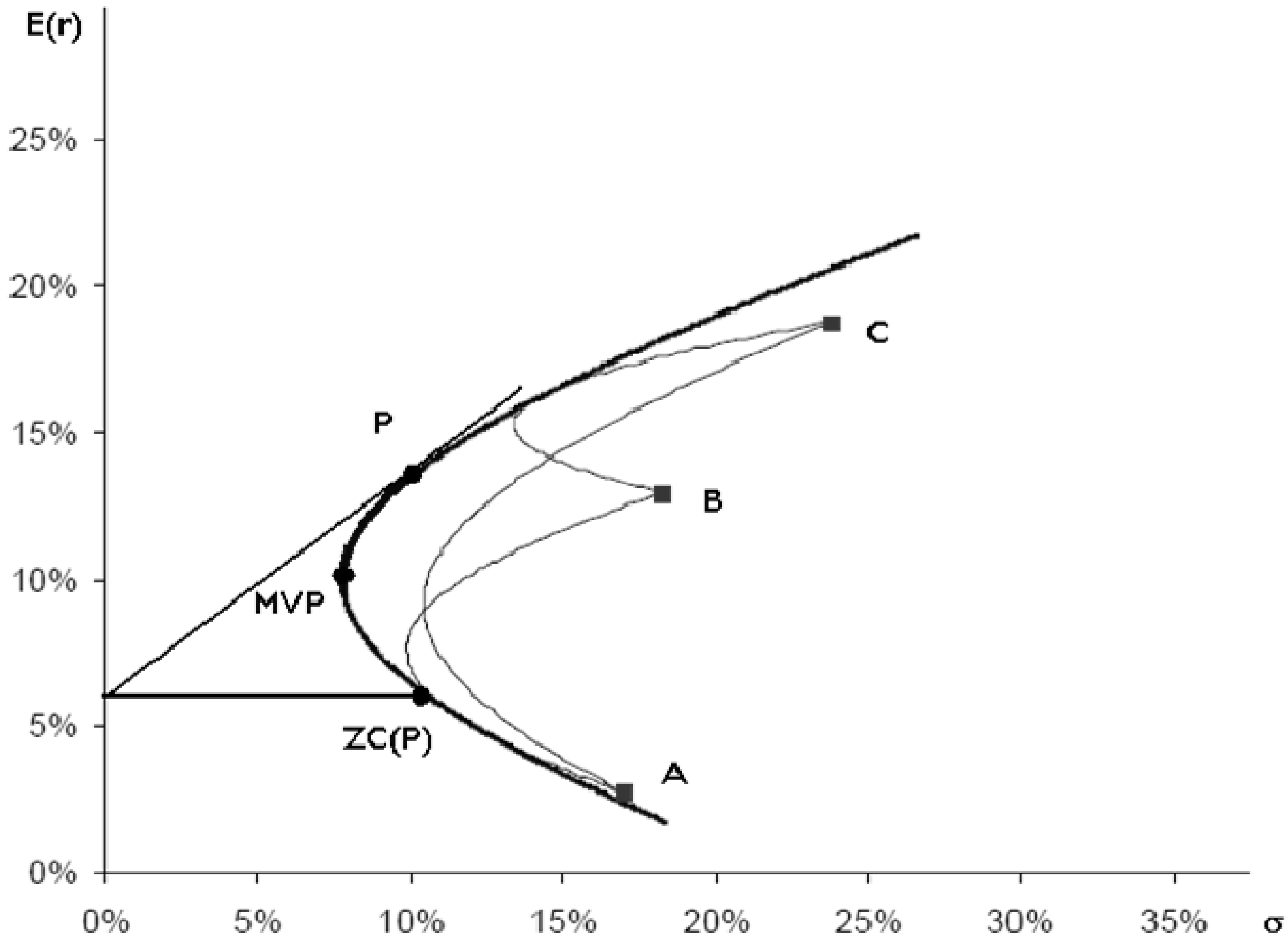
$$\boxed{\begin{aligned}&\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}'\mathbf{C}\mathbf{w}\\ &\mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}} = E(r_P)^*\\ &\mathbf{1}'\mathbf{w} = 1\end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

Határportfoliók görbéje
(porfolio frontier, PF)

- $\bar{r}$ a várható hozamok vektora
- C a hozamok kovariancia-mátrixa
- $w = (w_1, \ldots, w_n)$ az egyes eszközök portfolió-súlyainak vektora

A határportfoliók görbéje (PF)



A határportfoliók tulajdonságai I.

I. **Bármely határportfolió előállítható két különböző határportfolió lineáris kombinációjaként.**

II. A PF görbe alakja a **várható hozam – szórás** síkjában **hiperbola,** míg a **várható hozam – variancia** síkban **parabola.**

III. Az átlag - variancia kritérium szempontjából csak az **MVP portfolió várható hozamánál nagyobb várható hozamú határportfoliók hatékonyak** $\Rightarrow$ EPF (efficient portfolió frontier) $EPF = \{P \in PF, E(r_P) \geq E(r_{MVP})\}$

IV. Az MVP portfolió kivételével bármely P határportfolióhoz található olyan ZC(P) szintén határportfolió, hogy

$$Cov[P, ZC(P)] = 0$$

A határportfoliók tulajdonságai 2.

V. Legyen Q egy kockázatos portfolió és P $\in$ PF, de P$\neq$MVP

1. ha Q $\in$ PF, akkor $r_Q = r_{ZC(P)} + \beta_{QP}[r_P - r_{ZC(P)}]$
2. ha Q $\notin$ PF, akkor $r_Q = r_{ZC(P)} + \beta_{QP}[r_P - r_{ZC(P)}] + \varepsilon_{QP}$

$$E(r_Q) = E(r_{ZC(P)}) + \beta_{QP}\left[E(r_P) - E(r_{ZC(P)})\right]$$

Bármely Q portfolióra teljesül!

Ahol $Cov(r_P, \varepsilon_{QP}) = Cov(r_Q, \varepsilon_{QP}) = E(\varepsilon_{QP}) = 0$ és $\beta_{QP} = \dfrac{Cov(r_P, r_Q)}{\sigma_P^2}$

Portfolió kiválasztás több ép. esetén II.

- n darab értékpapír, és **van kockázatmentes eszköz**

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}'\mathbf{C}\mathbf{w}$$
$$\mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}} + (1 - \mathbf{w}'\mathbf{1})r_f = E(r_P)^*$$

A határportfoliók görbéje (PF) két félegyenesre illeszkedik!

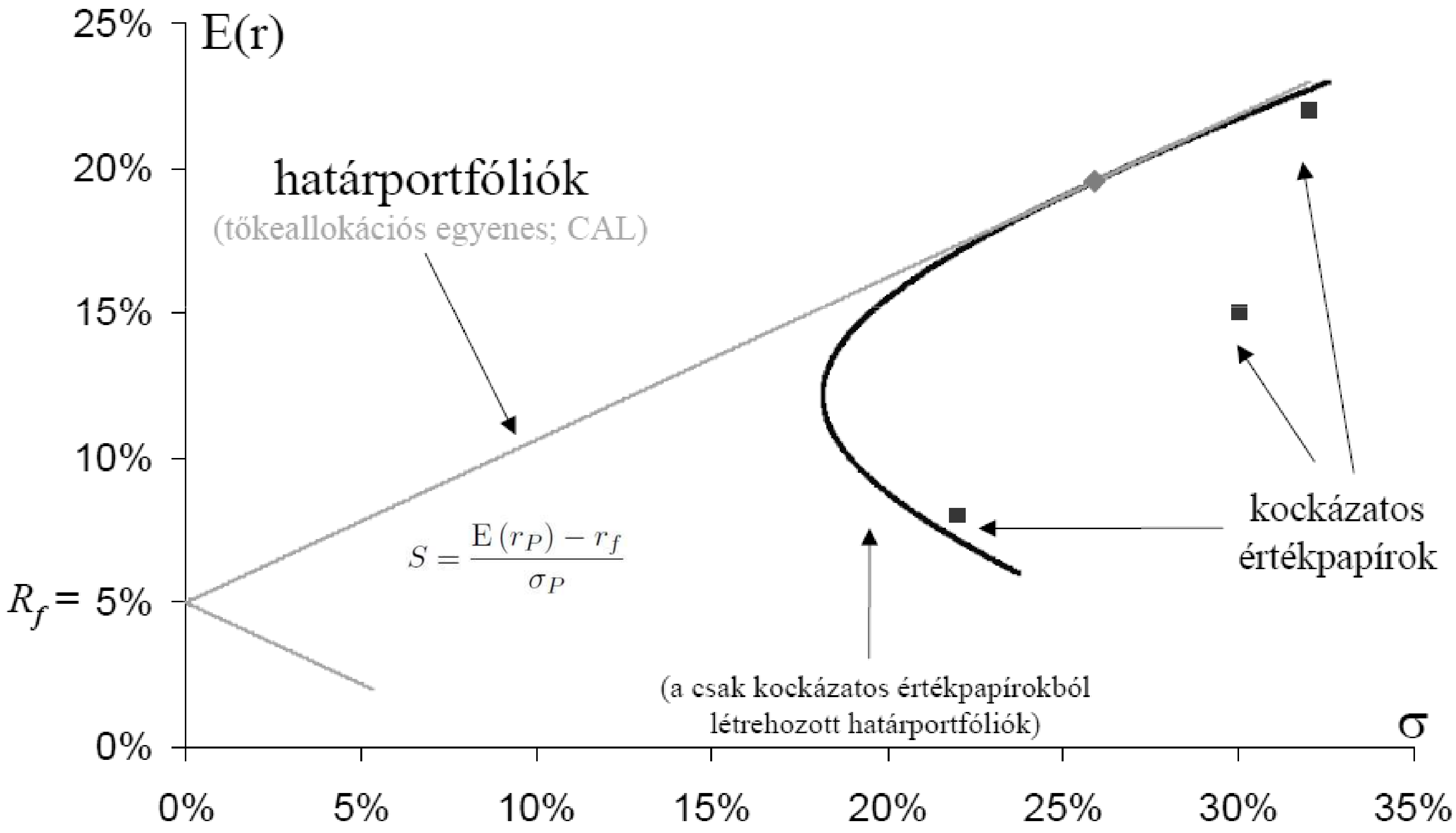
- A hatékony portfoliók ez esetben a pozitív meredekségű félegyenesen lesznek

$$EPF = \{P \in PF, E(r_P) \geq r_f\}$$

- Az egyenes meredeksége szemléletesen az egységnyi kockázatra jutó többlethozam (Sharpe-mutató)

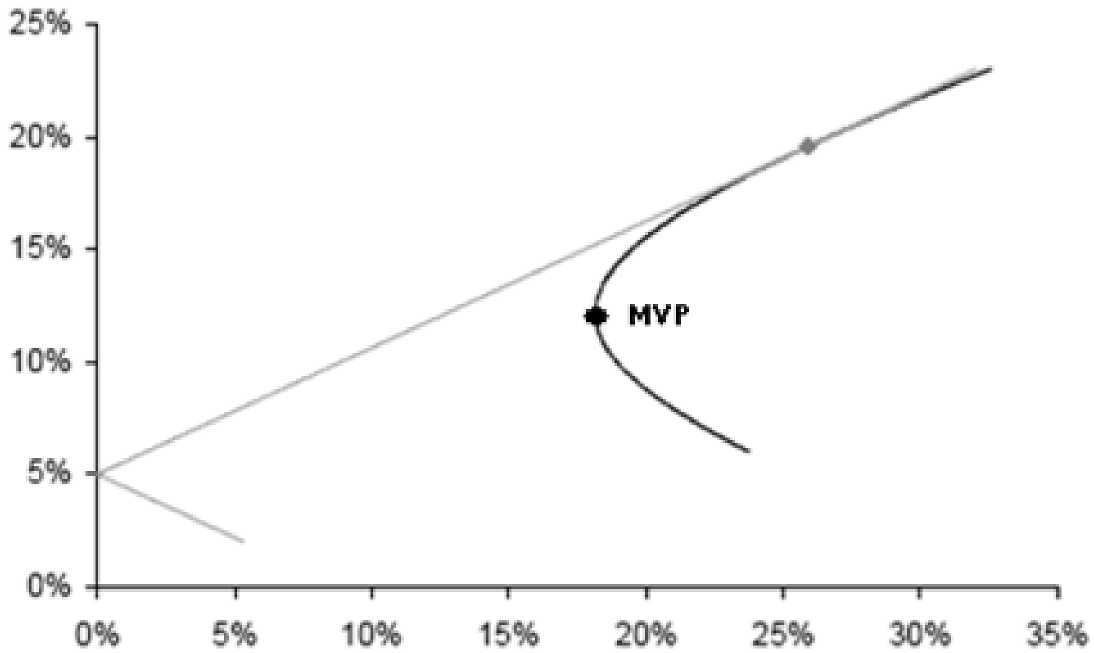
$$S = \frac{\mathrm{E}(r_P) - r_f}{\sigma_P}$$

A határportfoliók görbéje (PF*)



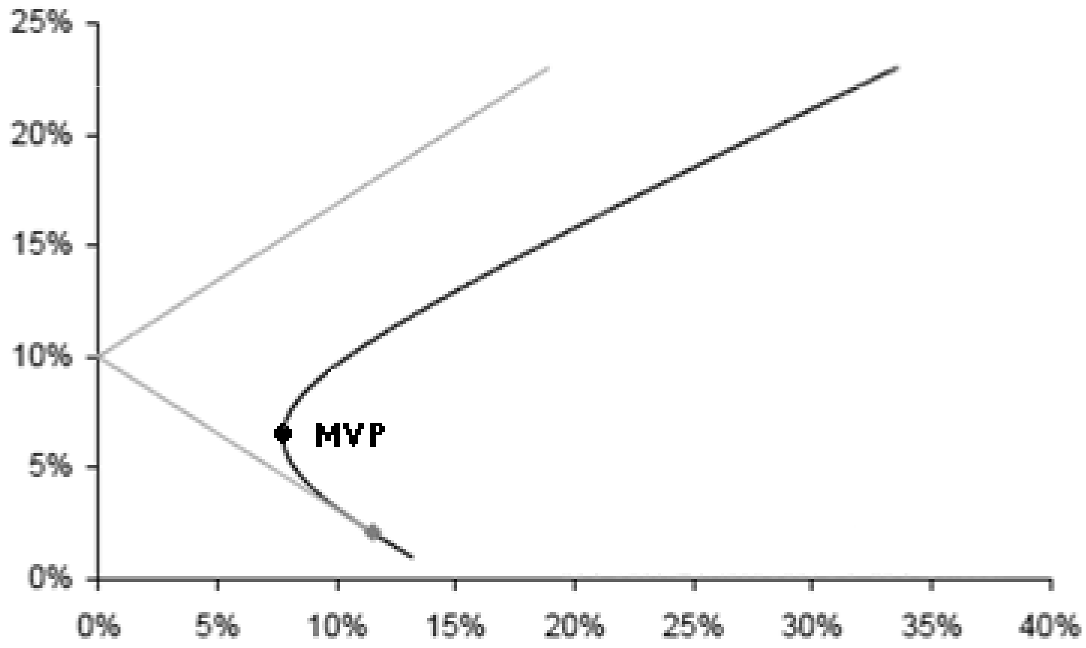
Lehetséges érintési portfoliók 1.

- Ha $r_f \leq E(r_{MVP})$ akkor az **érintési portfolió hatékony**
- A hatékony portfoliókban az érintési (kockázatos) portfolió aránya ≥0.
- Ebben az esetben a hatékony portfoliók halmaza (EPF*) a kockázatos portfoliókon értelmezett legnagyobb meredekségű CAL lesz



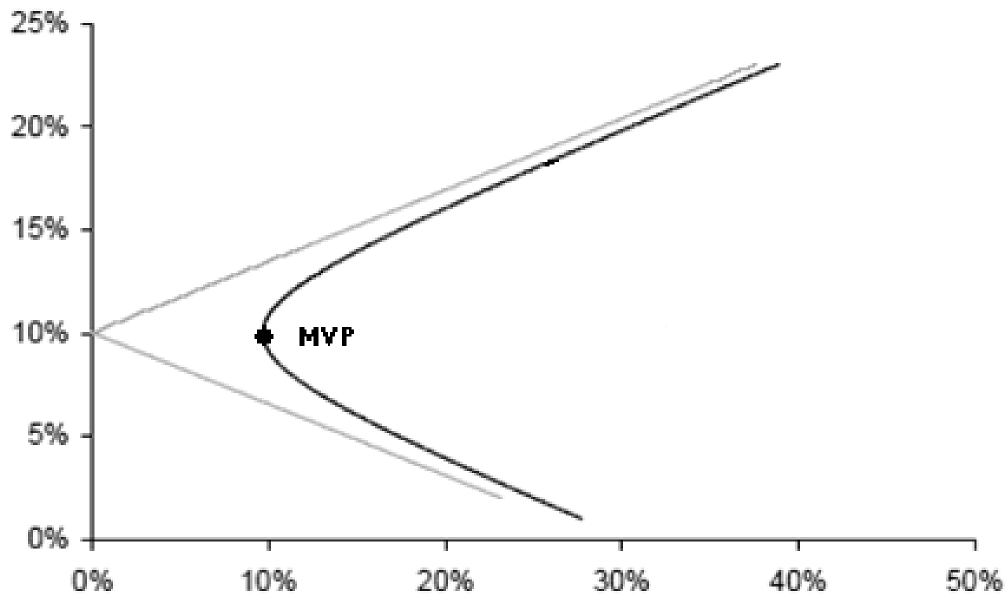
Lehetséges érintési portfoliók 2.

- Ha $r_f \geq E(r_{MVP})$ akkor **az érintési portfolió nem hatékony**
- A hatékony portfoliókban ekkor r_f aránya ≥1, míg az érintési (kockázatos) portfolió aránya ≤0



Lehetséges érintési portfoliók 3.

- Ha $r_f = E(r_{MVP})$ akkor **nem lesz érintési portfolió**.
- A határportfoliók egyenesei ekkor pont a hiperbola aszimptotái lesznek
- A hatékony portfoliókban ekkor r_f aránya =1, míg a (kockázatos) portfolió aránya =0, vagyis a kockázatos rész mindig önfinanszírozó kell legyen. (A short pozíciókkal szemben ugyanannyi long áll.)



A határportfoliók tulajdonságai I.

I. **Bármely határportfolió előállítható két különböző határportfolió lineáris kombinációjaként.**

II. A **kockázatmentes eszköz** határportfolió.

III. **Érintési portfolió**: olyan portfolió, amely kizárólag kockázatos eszközökből áll, szintén határportfolió

$\Downarrow$

IV. Ha van érintési portfolió, akkor b**ármelyik határportfolió** előállítható az **érintési portfolió** és a **kockázatmentes eszköz** lineáris kombinációjaként.

$\Downarrow$

V. **Szeparációs tulajdonság** $\Rightarrow$ Az egyes kockázatos értékpapírokba történő befektetések egymáshoz viszonyított aránya minden határportfolióban ugyanaz lesz.

Szeparációs tulajdonság

- **Kockázatmentes eszköz esetén,** ha $r_f < E(rMVP)$ a portfolió kiválasztás problémája **két független feladatra** bontható:

1. Az **érintési portfolió** meghatározása: a CAL meredekségének (Sharpe-mutató) maximalizálásával. Ez a tisztán kockázatos eszközökből álló portfolió **minden befektető esetén ugyan olyan lesz**, függetlenül az egyéni preferenciáktól.
2. Az **optimális portfolió kiválasztása** az egyéni preferenciák alapján $\Rightarrow$ **tőkeallokáció:** a befektetésre szánt vagyon megosztása az érintési portfolió, és a kockázatmentes eszköz között.

A határportfoliók tulajdonságai 2.

VI. Legyen Q egy portfolió és P $\in$ PF*, de E(rP)$\neq$rf

1. ha Q $\in$ PF*, akkor $r_Q = r_f + \beta_{QP}[r_P - r_f]$
2. ha Q $\notin$ PF*, akkor $r_Q = r_f + \beta_{QP}[r_P - r_f] + \varepsilon_{QP}$

$$E(r_Q) = r_f + \beta_{QP}\left[E(r_P) - r_f\right]$$

Bármely Q portfolióra teljesül!

Ahol $Cov(r_P, \varepsilon_{QP}) = Cov(r_Q, \varepsilon_{QP}) = E(\varepsilon_{QP}) = 0$ és $\beta_{QP} = \dfrac{Cov(r_P, r_Q)}{\sigma_P^2}$

Feladatok

Legyen az A értékpapír esetén σ_A=10%, $E(r_A)$=8%

A B értékpapír esetén pedig σ_B=20%, $E(r_B)$=14%

A két eszköz hozama közötti korreláció ρ=0,5

Hasznossági függvényünk $U=E(r) - 0{,}005A\sigma^2$ alakú

A kockázatmentes eszköz hozama pedig $_r$f 7%

1. Határozzuk meg az érintési portfoliót!
2. Határozzuk meg az optimális portfoliót A=4 esetén!
3. Mennyi lesz az optimális portfolió hasznossága?

A hatékony portfoliók halmaza (EPF) még egyszer

- Az A befektetés **dominálja** B-t ha $E(r_A) \geq E(r_B)$ és $\sigma_A \leq \sigma_B$, ahol legalább az egyik egyenlőtlenség szigorú.
- Másképpen: az A portfolió dominálja a B portfoliót, ha :

1. magasabb várható hozamot biztosít ugyanakkora (vagy kisebb) kockázat mellett,

vagy

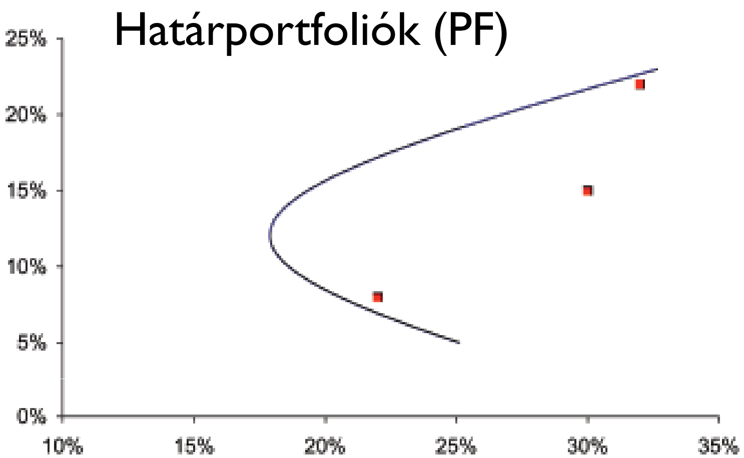
2. kisebb kockázattal rendelkezik ugyanakkora (vagy nagyobb) várható hozam mellett.

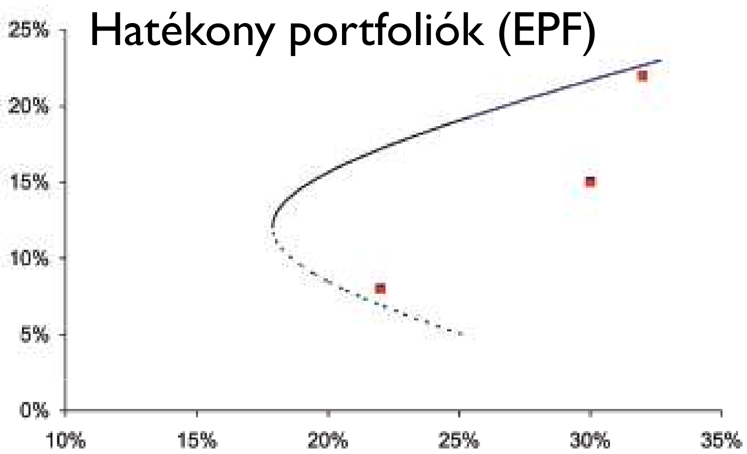
- Az X portfolió **hatékony,** ha nem található olyan Y portfolió, amelyre $E(r_Y) \geq E(r_X)$ és $\sigma_Y \leq \sigma_X$ úgy, hogy legalább az egyik egyenlőtlenség szigorú.

- A racionális befektetők a hatékony portfoliók közül választanak

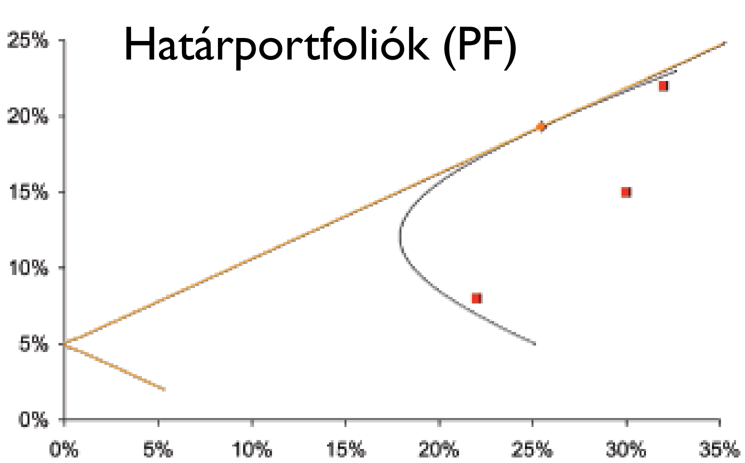
A hatékony portfoliók halmaza még egyszer

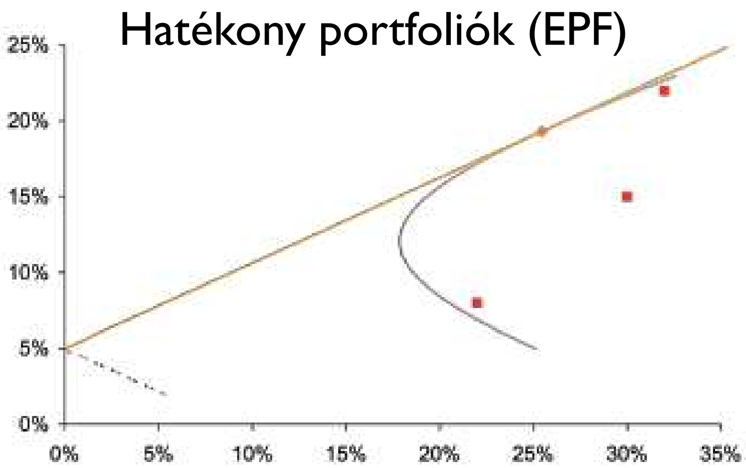
- **Csak kockázatos eszközök esetén:**





- **Kockázatos és kockázatmentes eszköz esetén:**

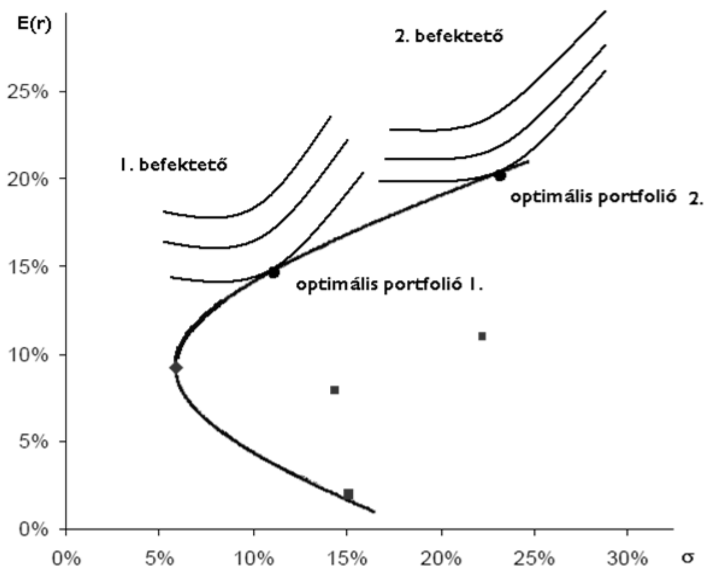




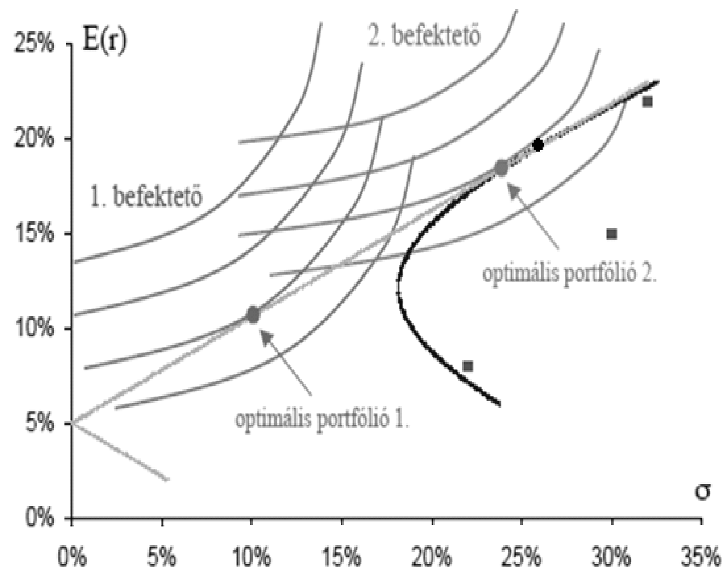
Az optimális portfolió

- A racionális befektetők a hatékony portfoliók közül a saját kockázati preferenciáik (hasznosságfüggvényük) alapján választják ki a számukra optimalis portfoliót.
- Azt a portfoliót választják, amely a legmagasabb közömbösségi görbén helyezkedik el.

Csak kockázatos eszközök esetén:



Kockázatos és kockázatmentes eszköz esetén:



Az előadás vázlata

1) Döntési szabályok bizonytalan szituációkban
   - Várható hasznosság
   - Átlag – variancia kritérium
2) Portfolió kiválasztás és optimális befektetői döntések (Markowitz-modell)
3) A tőkepiaci árfolyamok modellje (Capital Asset Pricing Model, CAPM)
4) Faktormodellek
5) Az arbitrált árfolyamok elmélete (Arbitrage Pricing Theory, APT)

A tőkepiaci árfolyamok modellje (CAPM)

Kérdésfelvetés:

- Mi történik a tőkepiacon, ha minden befektető racionális, vagyis az előzőekben tárgyalt Markowitz-modellt alkalmazza?

- Milyen feltételek mellett lesz egyensúly, és milyen tulajdonságai lesznek az egyensúlynak?

A CAPM feltevései

A piacra vonatkozó feltevések:

- Az **információ** mindenki számára **ingyen** és egy időben **elérhető**.
- **Létezik kockázatmentes eszköz** és a kockázatmentes ráta mellett korlátlanul lehet hitelt felvenni és kölcsönadni.
- **Nincsenek** adók, **tranzakciós költségek**, és egyéb piaci tökéletlenségek.
- Az összes eszközök mennyisége változatlan, az **összes eszköz piacképes** és **végtelenül osztható**.
- **Zárt gazdaság feltevése**

A befektetőkre vonatkozó feltevések:

- A befektetők hasznosságmaximalizálók és **kockázatkerülők**.
- Döntéseiket a **várható hozamokra** és a **varianciákra** alapozva hozzák meg.
- Ezen két tényező tekintetében **homogén várakozásokkal** rendelkeznek.
- A befektetők **azonos időhorizonttal** rendelkeznek.
- **Árelfogadóak**
- **Csak portfolió jövedelmük van** (nincs munkajövedelmük)

A CAPM következtetései I.

- Mivel feltettük, hogy van kockázatmentes eszköz, ezért egyensúlyban minden befektető ugyanolyan szerkezetű kockázatos portfoliót (**érintési portfóliót**) tart
- Senki nem tart kockázatos értékpapírt ezen a portfolión kívül
- Az összes befektető kockázatos portfolióinak összege megegyezik a **piaci portfolióval**

- **Egyensúlyban az érintesi portfolió és a piaci portfolió (M) megegyezik**
- Megfordítva: minden befektető olyan arányban választ kockázatos eszközöket, mint amilyen arányban azok a piaci portfolióban szerepelnek

A CAPM következtetései 2.

- A piaci portfolió tehát érintési portfolió $\Rightarrow$ hatékony

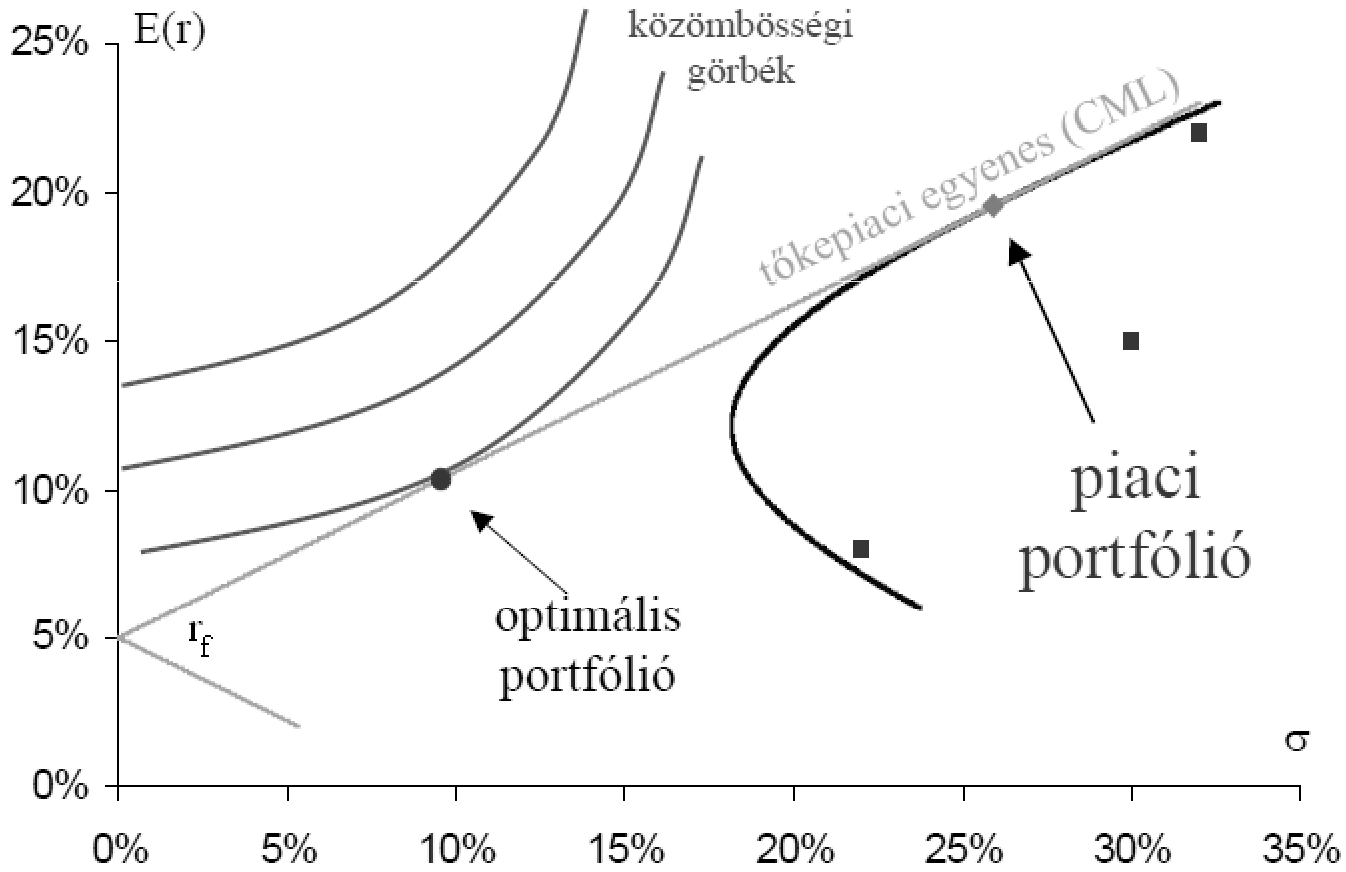
$\Downarrow$

- A kockázatmentes eszköztől a piaci portfolióhoz húzott érintő (**tőkepiaci egyenes**, Capital Market Line, **CML**) **a legnagyobb meredekségű CAL**

$$E(r_Q) = r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \sigma_Q$$

- **Piaci portfolió:** $M = \left(\frac{V_1}{V}, \frac{V_2}{V}, \ldots \frac{V_n}{V} \right)$ $\quad V = \sum_{i=1}^{n} V_i$
- ahol V_i az i-edik értékpapír piaci értéke (árfolyam x darabszám), V pedig a teljes piaci kapitalizáció

A tőkepiaci árfolyamok modellje (CAPM)



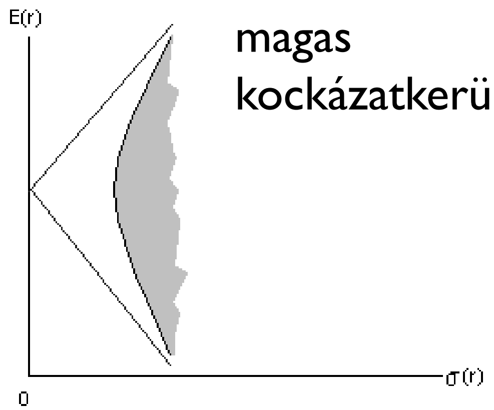
A CAPM következtetései 3.

- **A piaci portfolió kockázati prémiuma** arányos annak varianciájával, illetve **a tipikus befektető kockázatelutasításának mértékével**
- A piaci portfolióba allokált tőke optimális aránya:

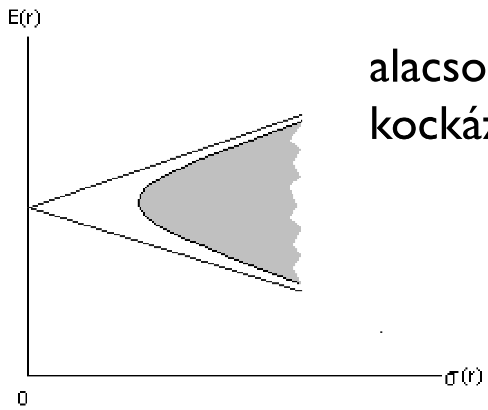
$$y = \frac{E(r_M) - r_f}{0{,}01 A \sigma_M^2}$$

a piac egészére nézve azonban y=1

$$\Rightarrow \quad E(r_M) - r_f = 0{,}01 \bar{A} \sigma^2$$



magas kockázatkerülés



alacsony kockázatkerülés

A CAPM következtetései 4.

- Az egyes **eszközök kockázati prémiuma** az M **piaci portfolió kockázati prémiumával**, illetve az adott eszköz piaci portfolióra vonatkozó β **együtthatójával arányos.**

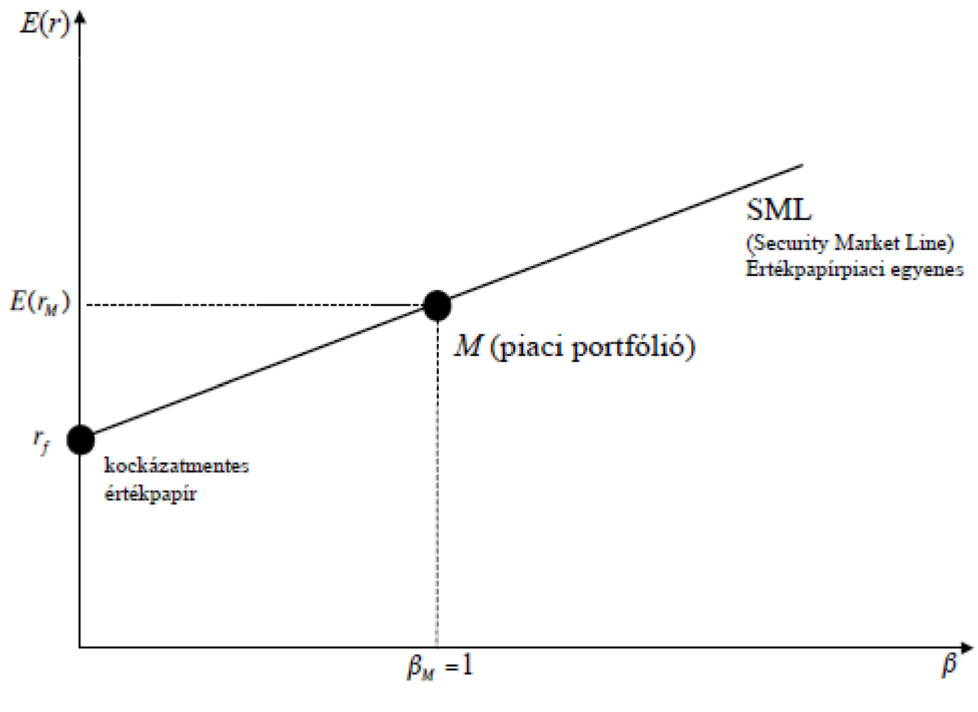
$$E(r_i) - r_f = \frac{Cov(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}\left[E(r_M) - r_f\right] = \beta_i\left[E(r_M) - r_f\right]$$

- Az i-edik eszköz (portfolió) kockázati prémiuma attól függ, hogy **az i-edik eszköz milyen mértékben járul hozzá a piaci portfolió kockázatához** (ugyanis az eszközt nem önmagában, hanem egy jól diverzifikált portfolió részeként tartjuk).
- Ezt a hozzájárulást a piaci portfolióval való együttmozgás (a kovariancia) meri, vagyis a béta $\Rightarrow$ **SML**

Értékpapír piaci egyenes
(Security Market Line, SML)

- Ez az összefüggés minden jól árazott eszközre és portfolióra vonatkozik (nem csak a hatékonyakra)

$$E(r_i) = r_f + \beta_i \left[E(r_M) - r_f\right]$$



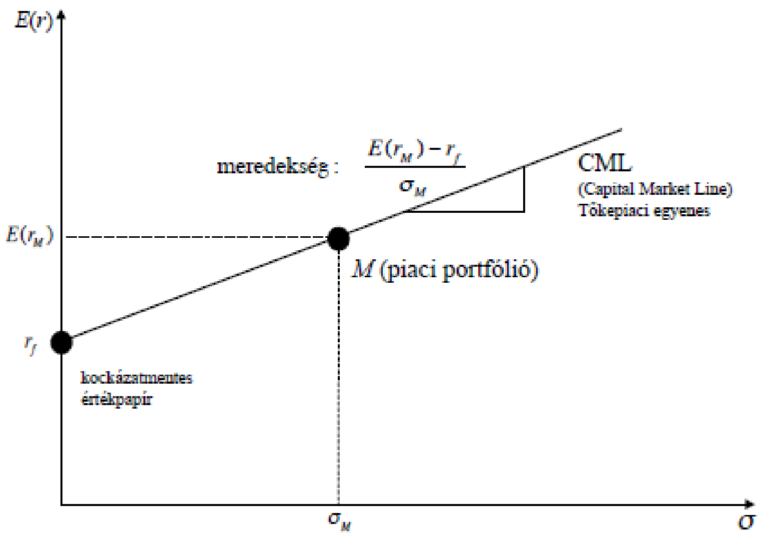
Értékpapír piaci egyenes
(Security Market Line, SML)

- Ha az i-edik értékpapír ara „ helyes" , akkor az értékpapír az SML-re esik (a kockázati prémiuma a kockázatot figyelembe véve méltányos)
- Alulárazott $\Rightarrow$ SML felett; felülárazott $\Rightarrow$ SML alatt
- A béta a nem diverzifikálható / szisztematikus / piaci kockázatot méri (a CAPM szerint csak az ilyen kockázat vállalásáért jár kockázati prémium)
- Mi van emögött? Egyrészt mindenki a jól diverzifikált piaci portfoliót tartja, így az egyedi kockázatok az árazásban nem játszanak szerepet. Másrészt feltettük, hogy a befektetőknek csak portfolió-jövedelmük van, (pl. nincs munkajövedelmük sem) ezért a piaci portfolió kockázatán kívül más kockázati tényezővel nem kell számolniuk.

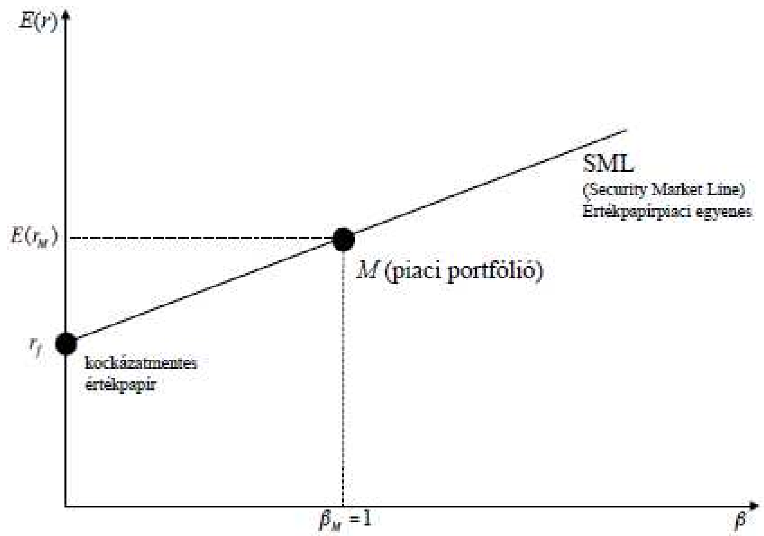
A CML és az SML összehasonlítása

- A teljes kockázat (σ_Q) függvényében adja meg a varható hozamot
- Csak a hatékony portfoliók fekszenek a CML-en

- A piaci kockázat (βi) függvényében adja meg a várható hozamot
- Egyensúlyban minden eszköz és portfolió rajta fekszik az SML-en



CML



SML

A CAPM következtetései: összefoglalás

- Egyensúlyban a kockázatos eszközökből álló, értéksúlyozású piaci portfolió érintési portfolió
- Ezért minden befektető a **kockázatmentes eszköz** es a **piaci portfolió** valamilyen keverékébe fekteti a pénzét $\Rightarrow$ **CML**
- Az összes értékpapír hozama kifejezhető a jól ismert hozamegyenlettel (az egyes értékpapírok varható kockázati prémiuma a **piaci portfolióval való együttmozgástól** (kovariancia) függ $\Rightarrow$ **SML**
- Csak a nem diverzikálható (szisztematikus, piaci) kockázatvállalásáért jár kockázati prémium
- A passzív befektetési stratégia hatékony?

Feladatok

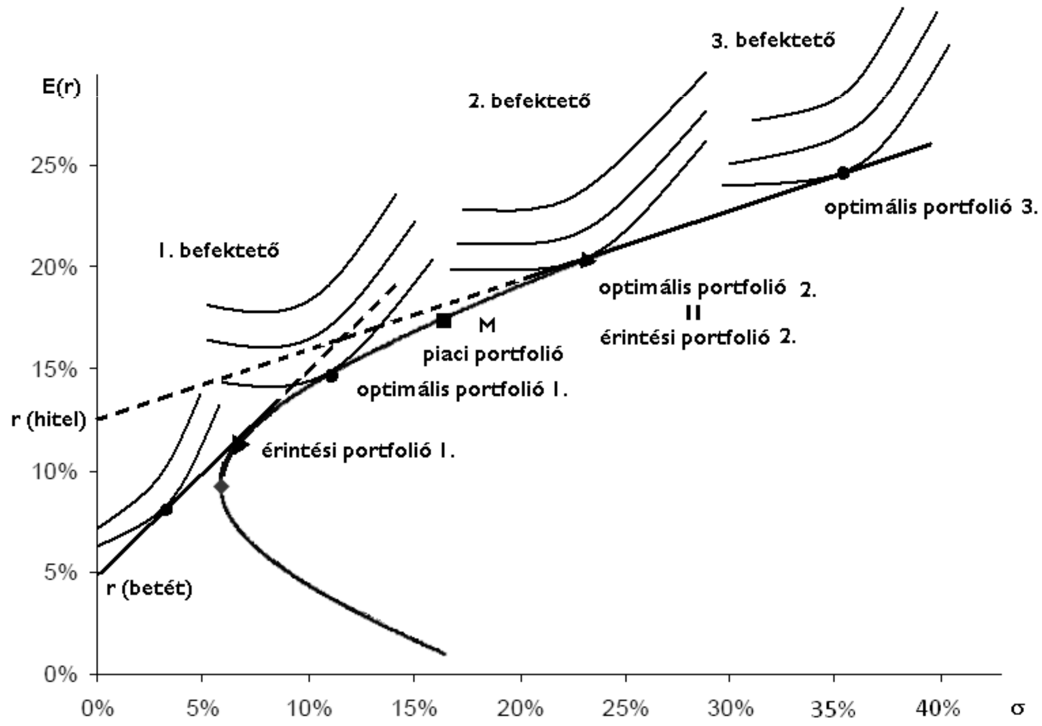
- A C értékpapír ára jelenleg 1000 Ft. A papír elemzők által meghatározott egy éves célára 1150 Ft. Ugyanakkor a bankbetét 5% hozamot fizet, míg a piaci portfolió várható hozama15%. Az említett értékpapír piaci portfolióra vonatkozó β-ja 0,8.

1. A CAPM szerint növeljük vagy csökkentsük pozíciónkat a C értékpapírban?
2. Mennyi lenne a C értékpapír ára egyensúlyban?

A CAMP korlátozott hitelfelvétel mellet

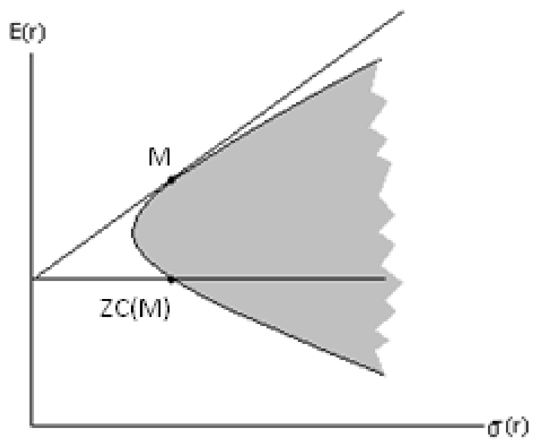
Három eset lehetséges:

1. Nem lehet hitelt felvenni, de van kockázatmentes eszköz
2. Lehet hitelt felvenni, de magasabb kamat mellett mint a betéti kamat $\Rightarrow$ vannak tranzakciós költségek
3. Nincs kockázatmentes eszköz.



A CAMP korlátozott hitelfelvétel mellet

- Mindhárom esetben a piaci portfolió hatékony kockázatos portfoliók kombinációjából áll össze $\Rightarrow$ hatékony lesz (a határportfoliók I. tulajdonsága)
- Ekkor a piaci portfoliónak lesz egy zéró kovariancia (béta) nem hatékony párja (IV. tulajdonság)



- Továbbá bármely Q portfolióra igaz (V. tulajdonság):

$$E(r_Q) = E(r_{ZC(P)}) + \beta_{QP}\left[E(r_P) - E(r_{ZC(P)})\right]$$

A zéró béta modell:

$$E(r_i) = E(r_{ZC(M)}) + \beta_i\left[E(r_M) - E(r_{ZC(M)})\right]$$

Az előadás vázlata

1) Döntési szabályok bizonytalan szituációkban
   - Várható hasznosság
   - Átlag – variancia kritérium
2) Portfolió kiválasztás és optimális befektetői döntések (Markowitz-modell)
3) A tőkepiaci árfolyamok modellje (Capital Asset Pricing Model, CAPM)
4) Faktormodellek
5) Az arbitrált árfolyamok elmélete (Arbitrage Pricing Theory, APT)

Faktormodellek: az indexmodell

- A CAPM két lényeges hátránya a gyakorlati alkalmazás során:
  1. a piaci portfolió közvetlenül nem megfigyelhető
  2. sok paramétert kell becsülni (2n+n(n-1)/2)
- Azzal az egyszerű feltevéssel élünk, hogy ismerjük a hozamokat generáló folyamatot:
- $r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i (r_{S\&P} - r_f) + \varepsilon_i$ vagy

  $R_i = \alpha_i + \beta_i R_{S\&P} + \varepsilon_i$
- A kockázatokat egy faktor írja le, amit a egy jól diverzifikált indexportfolió testesít meg
- A fenti összefüggés nem a várható, hanem a realizált (ex-post) hozamokra igaz!
- Várható hozamokra: $E(r_i) - r_f = \alpha_i + \beta_i [E(r_{S\&P}) - r_f]$

Faktormodellek: az indexmodell 1.

- Egy értékpapír kockázata (hozamának varianciája):

$$\sigma_i^2 = \underbrace{\beta_i^2\,\sigma_{\text{S\&P}}^2}_{\substack{\text{piaci} \\ \text{kockázat}}} + \underbrace{\sigma_{ei}^2}_{\substack{\text{specifikus} \\ \text{kockázat}}}$$

- Az értékpapír kockázata = piaci kockázat (tőkepiac kockázata x a portfolió kitettsége, bétája) + egyedi, specifikus kockázat)
- Két értékpapír kovarianciája így csak a bétáiktól és a piaci
- kockázattól függ) nem kell minden kovarianciát külön becsülni:

$$\text{Cov}\left(r_i, r_j\right) = \text{Cov}\left(\beta_i\left(r_{\text{S\&P}} - r_F\right), \beta_j\left(r_{\text{S\&P}} - r_f\right)\right)$$
$$= \beta_i\beta_j\sigma_{\text{S\&P}}^2$$

- (3n+1) adatot kell becsülni (2n+n(n-1)/2) helyett

Faktormodellek: az indexmodell 2.

- Egy portfolió kockázata:

$$\sigma_P^2 = \underbrace{\beta_P^2\,\sigma_{\text{S\&P}}^2}_{\substack{\text{portfólió}\\ \text{piaci}\\ \text{kockázata}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_{ei}^2}_{\substack{\text{portfólió}\\ \text{specifikus}\\ \text{kockázata}}}$$

- A portfolió kockázata = piaci kockázat (tőkepiac kockázata x a portfolió kitettsége, bétája) + specifikus kockázat
- Determinációs együttható: a szisztematikus variancia aránya a teljes variancián belül.

$$R^2 = \frac{\beta_P^2 \sigma_{S\&P}^2}{\sigma_P^2}$$

- Az indexmodell esetén R^2<0,6

Többfaktoros modellek I.

- **Miért kell több faktor?**

  Egyetlen faktor magyarázó ereje általában meglehetősen gyenge -> a befektetők valószínűleg többféle kockázat után várnak prémiumot

- **Mely tényezők lehetnek ezek?**

  A CAPM feltevései szerint a befektetőknek pl.: nincs munkajövedelmük

  - ✓ nem aggódnak a gazdasági ciklusok miatt **->** a **GDP változása** lehet ilyen tényező
  - ✓ vagy a fontos fogyasztási cikkek árainak változása miatt **->** **infláció változása**
  - ✓ vagy jövőbeni befektetési lehetőségek változása miatt **->** **hozamgörbe és kockázati prémium változása**
  - ✓ kisvállalatnál dolgozók nagyvállalati részvények iránti kereslete nagyobb lehet és fordítva **->** **vállalati méret**

Többfaktoros modellek 2.

- A többfaktoros modellek általános alakja:

$$R_i = \alpha_i + \beta_{i1} F_1 + \ldots + \beta_{ik} F_k + \varepsilon_i$$

  - ✓ ahol, $F_1 \ldots F_k$ közös kockázati tényezők, azaz faktorok
  - ✓ β_{ij} az i –edik eszköz j-edik faktorra vonatkozó érzékenysége
  - ✓ ε_i pedig az egyedi (vállalat specifikus) kockázat

- Chen, Roll és Ross (1986) modellje:

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_{iIP} IP_t + \beta_{iEI} EI_t + \beta_{iUI} UI_t + \beta_{iCG} CG_t + \beta_{iGB} GB_t + \varepsilon_{it}$$

  - ✓ IP = az ipari termelés százalékos változása
  - ✓ EI = a várható infláció százalékos változása
  - ✓ UI = a nem várható infláció százalékos változása
  - ✓ CG = a hosszú lejáratú vállalati kötvények és a hosszú lejáratú államkötvények hozamának különbsége
  - ✓ BG = a hosszú lejáratú államkötvények és a kincstárjegyek hozamkülönbsége a **t-edik tartási periódus alatt**

Többfaktoros modellek 3.

- Fama és French (1996) modellje:

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_{iM} R_{Mt} + \beta_{iSMB} SMB_t + \beta_{iHML} HML_t + \varepsilon_{it}$$

- Ahol, R_{Mt} egy jól diverzifikált tőkepiaci portfolió kockázati prémiuma a t-edik tartási periódusban
- SMB (small minus big) = egy kis kapitalizációjú és egy nagy kapitalitzációjú részvényportfolió hozamának különbsége
- HML (high minus low) = egy magas és egy alacsony könyv szerinti érték/piaci érték aránnyal (book to market ratio) rendelkező portfolió hozamának különbsége

Az előadás vázlata

1) Döntési szabályok bizonytalan szituációkban
   - Várható hasznosság
   - Átlag – variancia kritérium
2) Portfolió kiválasztás és optimális befektetői döntések (Markowitz-modell)
3) A tőkepiaci árfolyamok modellje (Capital Asset Pricing Model, CAPM)
4) Faktormodellek
5) Az arbitrált árfolyamok elmélete (Arbitrage Pricing Theory, APT)

Arbitrált árfolyamok elmélete
(Arbitrage Pricing Theory, APT)

- A modellt *Stephen A. Ross* publikálta 1976-ban
- A modell levezetéséhez szükséges két alapvető feltevés :
  1. Egyensúlyban a piacon nincs arbitrázs lehetőség
  2. Továbbá a hozamokat egy ún. lineáris faktormodell generálja, amely a következőképpen néz ki:

$$r_i = E(r_i) + \beta_{i1} f_1 + \beta_{i2} f_2 + \cdots + \beta_{im} f_m + \varepsilon_i$$

Az összes eszközre felírva:

$$\underset{(p\times 1)}{\mathbf{r}} = \underset{(p\times 1)}{\mathbf{e}} + \underset{(p\times m)}{\mathbf{B}} \underset{(m\times 1)}{\mathbf{f}} + \underset{(p\times 1)}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

ahol

$$E(\mathbf{f}) = \mathbf{0} \quad Cov(\mathbf{f}) = \mathbf{I}$$
$$E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0} \quad Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Psi}$$
$$Cov(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{f}) = \mathbf{0}$$

További feltevések: a befektetők homogén várakozása, a hozamokat generáló modell mindenki számára ismert, súrlódásmentes piacok, short selling megengedett

A faktor modell egyéb jellemzői

- Az eszközök várható hozama:

$$E(\mathbf{r}) = E(\mathbf{e} + \mathbf{Bf} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{e}$$

- A hozamok variancia-kovariancia mártrixa:

$$\boldsymbol{\Sigma} = Cov(\mathbf{r}) = \mathbf{BB}' + \boldsymbol{\Psi}$$

- Az i-edik eszköz hozamának varianciája:

$$Var(r_i) = \beta_{i1}^2 + \ldots + \beta_{im}^2 + \sigma_{\varepsilon i}$$

- Az i-edik eszköz és a k-adik eszköz kovarianciája

$$Cov(r_i, r_k) = \beta_{i1}\beta_{k1} + \ldots + \beta_{im}\beta_{km}$$

- Jól dieverzifikált portfolió hozama:

$$r_P = \mathbf{w}'\mathbf{r} = \mathbf{w}'\mathbf{e} + \mathbf{w}'\mathbf{Bf} + \mathbf{w}'\boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow r_P \approx \mathbf{w}'\mathbf{e} + \mathbf{w}'\mathbf{Bf}$$

Az APT származtatása I.

- **Az arbitrázsmentesség feltétele:**

Ha $\mathbf{w}'\mathbf{1} = 0$ és $\mathbf{w}'\mathbf{B} = \mathbf{0}$ akkor

$r_P = \mathbf{w}'\mathbf{e} + \mathbf{w}'\mathbf{B}\mathbf{f} = 0$ kell teljesüljön

- **…és következményei:**

$$\Rightarrow \quad \mathbf{w}'\mathbf{e} = 0$$

✓ Tehát egyensúlyban, egy kockázatmentes zéró befektetésű portfolió várható hozama megegyezik a tényleges hozamával, ami nulla.

✓ Az arbitázsmentesség feltétele miatt **1** és a **B** nullterének metszete megegyezik az **e** nullterével ezért **e** felírható **1** és **B** lineáris kombinációjaként.

$$\Rightarrow \quad \mathbf{e} = \mathbf{1}\lambda_0 + \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}$$

Az APT származtatása 2.

- Egyensúlyban tehát az i-edik eszköz várható hozama:

$$E(r_i) = \lambda_0 + \lambda_1 \beta_{i1} + \ldots + \lambda_m \beta_{im}$$

- Ha létezik kockázatmentes eszköz, akkor annak hozama:

$$r_f = \lambda_0 + \lambda_1 \beta_{i1} + \ldots + \lambda_m \beta_{im} = \lambda_0$$

- A j-edik faktor hatását tükröző portfolió hozama:

$$E(r_{Fj}) = \lambda_0 + \lambda_j$$

$$\lambda_j = E(r_{Fj}) - \lambda_0 = E(r_{Fj}) - r_f$$

- Az i-edik eszköz várható hozama tehát a következő alakban is felírható:

$$E(r_i) = r_f + \beta_{iF1}[E(r_{F1}) - r_f] + \ldots + \beta_{iFm}[E(r_{Fm}) - r_f]$$

- A λ együtthatók tehát az egyes faktorportfoliók kockázati prémiumait reprezentálják

Feladatok 1.

- Adottak a következő jól diverzifikált portfoliók, illetve a kockázatmentes eszköz:

Portfolió	E(r)	F_1 bétája
P1	12%	1,2
P2	8%	0,6
r_f	6%	0

- Fennállhat-e arbitrázslehetőség, ha tudjuk, hogy az F_1 faktor kockázati prémiuma 5%? Ha igen, milyen stratégiát kövessünk?

Feladatok 2.

- Adottak a következő jól diverzifikált portfoliók, illetve a kockázatmentes eszköz:

Portfolió	E(r)	F_1 bétája	F_2 bétája
P1	31%	1,5	2,0
P2	27%	2,2	-0,2
P3	18%	0,5	2,0
r_f	6%	0	0

- Fennállhat-e arbitrázslehetőség, ha tudjuk, hogy az F_1 faktor kockázati prémiuma 10% az F_2 faktoré pedig 5%?

A faktorok határozatlansága

- A faktor modell fontos tulajdonsága, hogy **a faktorok nem egyediek**.
- Ha az eszközök hozama felírható valamely *m* faktor segítségével, akkor ún. ortogonális transzformációval valamely másik *m* faktorral is felírható. (Ezt az ortogonális transzformációt gyakran forgatásnak is nevezik.)
- Legyen **T** egy m x m –es ortogonális mátrix, azaz $\mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{I}$,ekkor

$$\mathbf{r} - \mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{T}'\mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}^{*}\mathbf{f}^{*} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

- Könnyen belátható, hogy ekkor **B*** is ugyanazt a variancia-kovariancia mátrixot generálja mint **B**, hiszen

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}\mathbf{B}' + \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{T}'\mathbf{B}' + \boldsymbol{\Psi} = (\mathbf{B}^{*})(\mathbf{B}^{*})' + \boldsymbol{\Psi}$$

- **A hozamok egy adott mintájához tehát nem határozhatók meg egyértelműen a kockázati tényezők !**

Faktoranalízis példa 1.

- **Minta:** a BÉT 22 részvénye napi hozamok alapján 1999.10.12. és 2002.10.08. közötti időszakban

		Factor1	Factor2	Factor3	Factor4	Factor5	Factor6
1	**Antenna**	0,49	0,29	0,03	0,21	-0,23	0,15
2	Borsodchem	0,46	-0,35	0,26	0,13	-0,29	-0,12
3	**Danubius**	0,42	0,05	0,05	-0,07	0,47	0,12
4	**Démász**	0,36	0,04	-0,52	0,23	0,14	-0,12
5	**Egis**	0,48	-0,20	0,01	-0,16	-0,08	-0,29
6	**Matáv**	0,65	-0,08	0,07	-0,12	-0,05	-0,12
7	Mezogép	0,39	-0,25	-0,20	-0,03	-0,16	0,28
8	**Mol**	0,58	0,05	0,09	0,09	0,01	0,04
9	**Nabi**	0,50	-0,16	-0,27	-0,14	0,11	0,07
10	**Otp**	0,20	-0,07	0,22	-0,16	0,12	0,71
11	**Pannonplast**	0,55	-0,12	0,03	-0,21	0,03	0,04
12	Prímagáz	0,31	-0,09	0,40	0,51	0,28	0,14
13	**Rába**	0,55	-0,06	-0,21	-0,01	0,29	-0,21
14	**Richter**	0,62	-0,08	0,16	-0,04	0,02	0,02
15	**Synergon**	0,51	0,07	-0,05	0,20	-0,09	0,00
16	**Tvk**	0,43	-0,37	0,27	-0,01	-0,21	-0,22
17	Zalakerámia	0,53	0,20	-0,18	-0,28	0,00	-0,04
18	Émász	0,18	-0,20	-0,38	0,55	0,04	0,17
19	Fotex	0,50	0,29	-0,13	-0,27	0,07	0,09
20	Humet	0,32	0,45	-0,06	0,27	-0,45	0,02
21	Ieb	0,17	0,32	0,30	0,18	0,45	-0,33
22	Phylaxia	0,38	0,49	0,21	-0,09	-0,17	0,03

Faktoranalízis példa 2.

- **Forgatás után:**

		Factor*1	Factor*2	Factor*3	Factor*4	Factor*5	Factor*6
1	**Antenna**	0,10	0,05	0,60	0,18	0,18	0,11
2	Borsodchem	0,68	-0,08	0,16	0,11	0,13	0,03
3	**Danubius**	-0,03	0,25	-0,04	0,12	0,34	0,47
4	**Démász**	-0,05	0,27	0,10	0,61	-0,11	0,12
5	**Egis**	0,50	0,34	0,04	0,09	-0,01	0,09
6	**Matáv**	0,45	0,35	0,21	0,12	0,19	0,20
7	Mezogép	0,22	0,15	0,09	0,32	0,38	-0,20
8	**Mol**	0,27	0,16	0,30	0,18	0,25	0,27
9	**Nabi**	0,18	0,41	-0,01	0,34	0,26	0,05
10	**Otp**	-0,10	-0,05	0,02	-0,10	0,79	0,01
11	**Pannonplast**	0,33	0,36	0,08	0,09	0,31	0,13
12	Prímagáz	0,19	-0,41	0,10	0,19	0,28	0,54
13	**Rába**	0,20	0,41	-0,01	0,37	0,04	0,35
14	**Richter**	0,39	0,22	0,20	0,11	0,31	0,25
15	**Synergon**	0,23	0,11	0,35	0,30	0,12	0,17
16	**Tvk**	0,69	0,04	0,04	0,02	0,07	0,06
17	Zalakerámia	0,10	0,56	0,26	0,09	0,14	0,10
18	Émász	-0,02	-0,22	0,04	0,70	0,08	-0,02
19	Fotex	-0,03	0,52	0,29	0,05	0,24	0,15
20	Humet	0,02	0,00	0,74	0,14	-0,09	-0,06
21	Ieb	-0,04	0,01	0,08	-0,08	-0,19	0,72
22	Phylaxia	0,03	0,21	0,57	-0,21	0,10	0,18